

Aula no 4

Fluxo do campo elétrico

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} \quad (1)$$

para uma superfície fechada a área é

1. Lei de Gauss

Suponha o campo ^{elétrico} produzido por uma carga pontiforme positiva q . A superfície que entra na Eq. (1) para o caso que estamos avaliando é uma esfera de raio r , conforme ^a Figura 1.

abaixo.

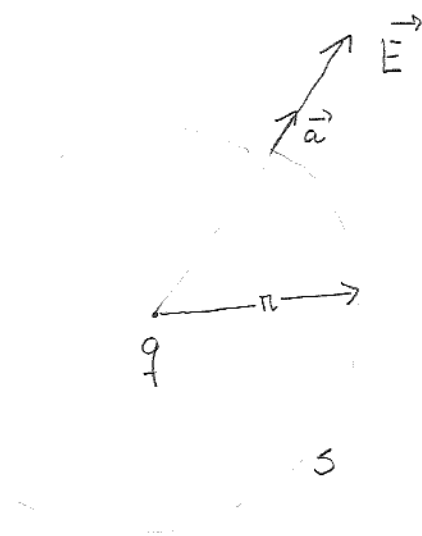


Fig. 1

Oual o fluxo do campo elétrico atravessando a superfície S definida na Fig. 1?

Como o módulo de $\vec{E}$ ($=|\vec{E}|$) é igual p/ qualquer ponto da superfície S da Fig. 1

$|\vec{E}| = E = q/r^2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \equiv$ a correspondente dire

ção e sentido coincidem com o vetor

normal $\vec{a}$ à superfície S , o fluxo

e'

$$\phi = E \times \text{área total de } S$$

ou

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2)$$

Suponha agora uma outra superfície

S_1 envolvendo a superfície S da Fig. 1

A superfície S_1 é não esférica como

mostrado na Fig. 2:

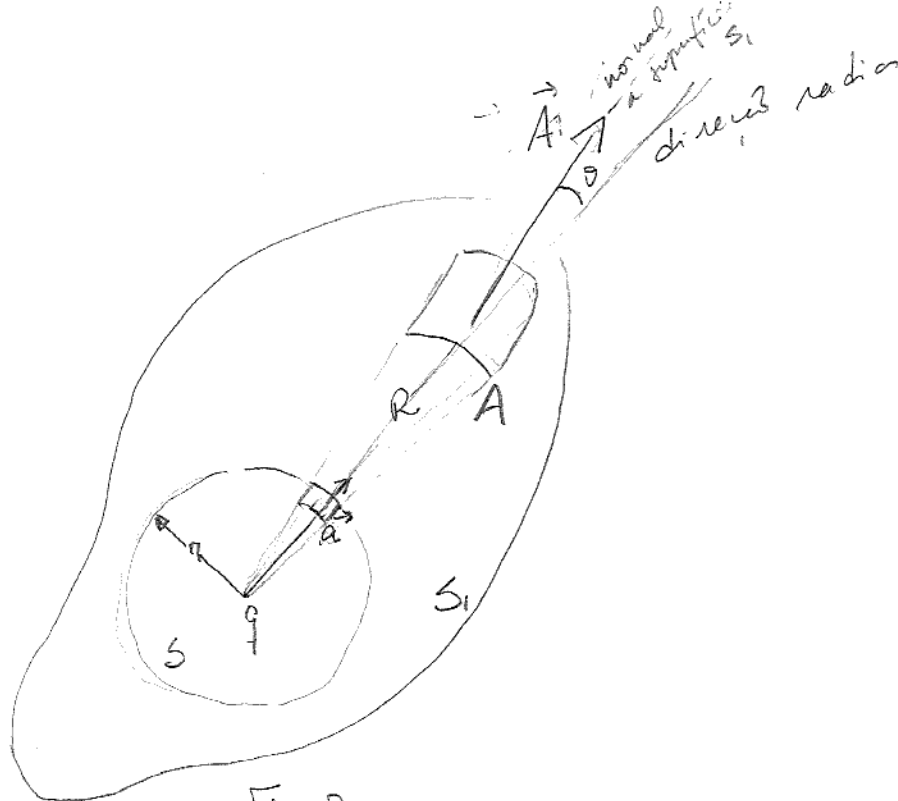


Fig. 2

Considere um cone com vértice em q
 que corta um pedaço A da superfície S esférica
 e também um pedaço A da superfície
 qualquer S_1 a uma distância R da
 carga pontual q .

Um ponto importante: o módulo do campo elétrico

$$E(R) = \left(\frac{r}{R} \right)^2 E(r) \quad (3)$$

Como $R > r$, então $\frac{r}{R} < 1$

logo $E_{(R)} < E_{(r)}$.

O fluxo no pedaço A:

$$\phi_{(R)} = \vec{E}_{(R)} \cdot \vec{A} = E_{(R)} A \cos \theta \quad (4)$$

O fluxo no pedaço a:

$$\phi_{(a)} = \vec{E}_{(r)} \cdot \vec{a} = E_{(r)} a \quad (5)$$

Agora a razão entre as áreas A

e a:

$$\frac{A}{a} = \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos \theta}}_{\text{devido à inclinação de A em relação à direção radial}} \quad (6)$$

Logo a Eq. (4) pode ser escrita

Como:

$$\vec{E}_{(R)} A \cos \theta = \left[E_{(R)} \left(\frac{R}{R} \right)^2 \right] \times$$

$$\times \left[a \left(\frac{R}{R} \right)^2 \frac{1}{\cos \theta} \right] \times \cancel{\cos \theta} = E_{(R)} \cdot a \quad (7)$$

Então

$$\phi_{(R)} = \phi_{(r)} \quad (8)$$

Conclusão: o fluxo de um
campo elétrico através de qualquer

Superfície ^{fechada} que envolva uma carga pontual é q/ϵ_0

Uma consequência imediata é que o fluxo total ^{de campo elétrico} através de uma superfície fechada é nulo quando a carga está colocada fora dessa superfície.

Podemos generalizar a "idéia" de fluxo quando existem mais 1, mas um certo nº de fontes $q_1, q_2, \dots, q_N$.

Os campos elétricos correspondentes se as fontes estiverem isoladas seriam $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_N$

respectivamente. Assim o fluxo Φ através de uma superfície S é

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_S (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} (q_1 + q_2 + \dots + q_N)\end{aligned}\quad (9)$$

9.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i$$

(10)

Lei de Gauss

O fluxo do campo elétrico $\vec{E}$

através de qualquer superfície fechada

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i$$

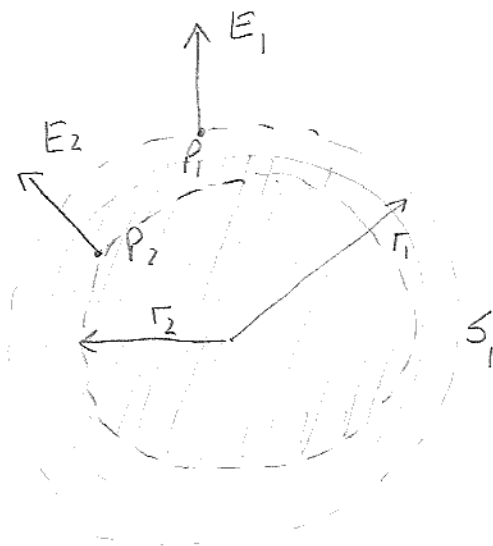
(11)

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho \, dv$$

Exemplos

1) Campo de uma distribuição esférica de carga

$$\rho = \rho(r)$$



O fluxo do campo elétrico pela superfície S_1 é

$$\Phi_{S_1} = 4\pi r_1^2 E_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \times \text{carga interna a } S_1$$

Lei de Gauss

(12)

então

$$E_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\text{carga interna à } S_1}{\pi^2} \quad (13)$$

Da mesma forma

$$E_2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\text{carga interna à } S_2}{\pi^2} \quad (14)$$

O campo ^{elétrico} em todos os p_{tos} de S_1 (S_2) é o mesmo campo elétrico se todas as cargas internas a S_1 estiverem concentradas no centro.

Para o caso S_2 , se tivéssemos
uma distribuição uniforme de carga

$$\rho_{S_2} = \frac{q'}{4\pi r_2^3} ; \quad q' = \text{carga interna à } S_2$$

enquanto em S_1

$$\rho_{S_1} = \frac{q}{4\pi r_1^3} ; \quad q = \text{carga interna à } S_1$$

então $\rho_{S_1} = \rho_{S_2}$

$$\frac{q'}{4\pi r_2^3} = \frac{q}{4\pi r_1^3}$$

então

$$q' = q \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^3 \quad (15)$$

Lembrando que $\frac{r_2}{r_1} < 1$.

Logo o campo elétrico dado na

Eq. (14)

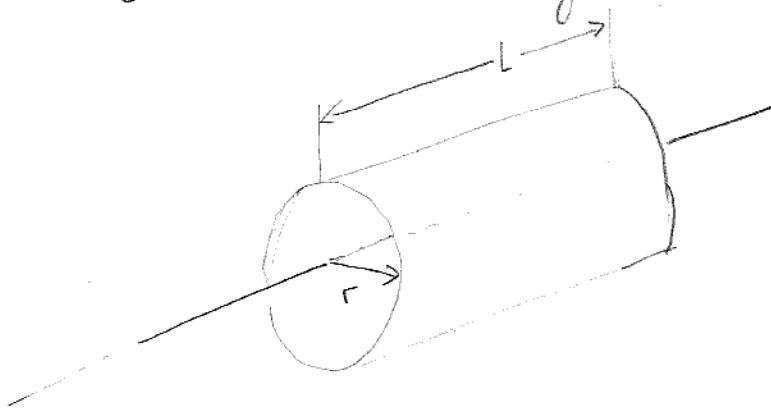
$$E_2 = \frac{1}{r_2^2} \times q \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^3 \quad (16)$$

ou

$$E_2 = q \frac{r_2}{r_1^3} \quad (17)$$

E_x : Campo de uma carga
linear

λ = densidade de carga linear



$$\phi = \frac{2\pi r L}{\epsilon_0} \times E_r$$

agora carga interna à superfície =

$$= \lambda L$$

Pela lei de Gauss

$$2\pi r \cancel{L} \times E_r = \frac{\cancel{\lambda L}}{\epsilon_0}$$

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$